Über die Gesetze der elektrodynamischen Induction.

Von dem w. M. **J. Stefan.**

I.

Die chemischen Kräfte in einer Kette, durch welche ein Strom von der Intensität i fliesst, liefern in jedem Zeitelemente dt eine der Stromintensität i proportionale Arbeit oder Energie. Wird diese mit $eidt$ bezeichnet, so ist e die bei der Einheit der Stromstärke in der Einheit der Zeit erzeugte Arbeit, das Mass der elektromotorischen Kraft der Kette.

Nach dem Ohm'schen Gesetze ist

$$e = wi \tag{1}$$

unter w den Widerstand der Strombahn verstanden. Somit besteht die Gleichung

$$eidt = wi^2dt. \tag{2}$$

Nach dem von Joule und Lenz gefundenen Gesetze bedeutet die zweite Seite dieser Gleichung die in der Strombahn während der Zeit dt entwickelte Wärme, hier im Arbeitsmass ausgedrückt. Die Gleichung selbst besagt also nur, dass die der Wirkung der chemischen Kräfte entsprechende Arbeit in eine äquivalente Wärmemenge in der Strombahn umgewandelt worden ist.

Die Gleichung (2) gilt aber nicht mehr, wenn durch den Strom selbst eine chemische Arbeit verrichtet oder eine mechanische Arbeit geleistet oder eine solche aufgenommen wird. Wird z. B. durch die Kräfte, mit welchen ein Strom auf einen Magnet wirkt, dieser letztere in Bewegung versetzt, so muss, wie Helmholtz in der Abhandlung über die Erhaltung der Kraft gezeigt hat, auch die dem Magnete ertheilte lebendige Kraft aus den chemischen Kräften der Kette geliefert werden. Die in de

Strombahn entwickelte Wärme ist dann kleiner, als sie im Vergleich zu dem gleichzeitigen chemischen Consum in der Kette sein sollte.

Wird ein Magnet durch einen Strom bewegt, so ist die aus den elektromagnetischen Kräften während einer sehr kleinen Zeit dt resultirende lebendige Kraft bestimmt durch das Product aus der Stromstärke i in die Änderung dW, welche die Grösse W in dieser Zeit dt erleidet. W selbst ist das Potential der von der Stromeinheit durchflossenen Strombahn auf den Magnet. Nach dem von Helmholtz aufgestellten Principe ist also

$$eidt = wi^2dt + idW \tag{3}$$

woraus

$$wi = e - \frac{dW}{dt} \tag{4}$$

folgt, d. h. $\frac{dW}{dt}$ stellt eine der elektromotorischen Kraft e entgegengesetzte elektromotorische Kraft dar, es ist die des Inductionsstroms, welcher durch die Bewegung des Magnetes erzeugt worden ist.

Wird umgekehrt der Magnet durch eine äussere Kraft der Wirkung des Stromes entgegen bewegt, so ist dazu ein Aufwand von Arbeit nöthig, und nach dem Princip von Helmholtz ist jetzt die in der Strombahn während der Zeit dt entwickelte Wärme äquivalent der in der Kette gleichzeitig aus den chemischen Kräften erzeugten mehr der geleisteten äusseren Arbeit. Diese ist ihrem absoluten Werthe nach wieder durch idW bestimmt, in die Formel (3) aber mit negativem Zeichen zu setzen. Es folgt dann statt der Gleichung (4) die folgende:

$$wi = e + \frac{dW}{dt}$$

und stellt jetzt $\frac{dW}{dt}$ die elektromotorische Kraft des mit dem Hauptstrome gleich gerichteten Inductionsstromes dar.

In diesen Fällen erscheint die Vorstellung eines den Hauptstrom schwächenden oder verstärkenden Inductionsstromes nicht

nothwendig. Diese Vorstellung hat jedoch eine reelle Grundlage, da Inductionsströme auch in einer geschlossenen Leitung, welche keine selbstständige elektromotorische Kraft besitzt, durch Bewegung eines Magnetes entstehen und zwar immer von solcher Richtung, dass die Bewegung des Magnetes in Folge der auftretenden elektromagnetischen Kräfte einen Aufwand von Arbeit erfordert. Das Äquivalent dieser Arbeit ist die in der Leitung durch den Inductionsstrom entwickelte Wärme und besteht die Gleichung

$$wi^2dt + idW = 0.$$

Da das erste Glied immer positiv ist, so muss i negativ oder positiv sein, je nachdem dW positiv oder negativ ist.

II.

Das Princip der Äquivalenz der von den chemischen Kräften erzeugten Energie einerseits, der in der Leitung entwickelten Wärme und der verrichteten äusseren Arbeit andererseits, ist von Helmholtz auch angewendet worden auf den Fall der Wechselwirkung zweier elektrischer Ströme. Bei dieser Anwendung ergeben sich jedoch Schwierigkeiten.

Nur dann, wenn die Stromintensität in dem einen Leiter immer als so klein vorausgesetzt wird, dass die inductorische Wirkung dieses auf den andern vernachlässigt werden kann, führt dies Princip, in derselben Weise wie vorhin angewandt, zu einem richtigen Resultat. Es ist auch nur dieser specielle Fall in der Abhandlung über die Erhaltung der Kraft behandelt.

Man kann aber aus diesem Principe die richtigen Ausdrücke für die Intensitäten der Inductionsströme auch in dem allgemeinen Falle erhalten, wenn man nicht die Vorgänge bei einer einfachen relativen Verschiebung der beiden Leiter in Betrachtung nimmt, wie Helmholtz es gethan, sondern das Princip auf die Vorgänge während eines ganzen Kreisprocesses in Anwendung bringt. Dies soll nun zunächst gezeigt werden.

In zwei Stromleitern, deren Widerstände w und w', erzeugen die elektromotorischen Kräfte e und e' die constanten Ströme von den Intensitäten J und J', so dass

$$e = wJ, \quad e' = w'J' \tag{5}$$

Können die beiden Leiter ihrer elektrodynamischen Wechselwirkung folgen, so gewinnen sie in der Zeit dt eine lebendige Kraft dL, und zugleich haben der Erfahrung gemäss während dieser Zeit dt die Stromintensitäten kleinere Werthe. Der leichteren Übersicht wegen mögen die eingetretenen Änderungen der Stromintensitäten durch die besonderen Zeichen dJ uno dJ' hervorgehoben, also die während des Zeitelementes dt herrschenden Stromstärken mit $J—dJ$ und $J'—dJ'$ bezeichnet werden. Die Stromintensitäten kehren zu ihren ursprünglichen Werthen wieder zurück, wenn die beiden Leiter am Ende der Zeit dt wieder festgehalten werden.

Die während der Zeit dt von den chemischen Kräften gelieferte Energie ist

$$dA = e(J-dJ)dt + e'(J'-dJ')dt$$

die in den beiden Leitern in derselben Zeit entwickelte Wärme ist

$$dB = w(J-dJ)^2 dt + w'(J'-dJ')^2 dt.$$

Die lebendige Kraft, welche die zwischen zwei geschlossenen Leitern wirksamen elektrodynamischen Kräfte in einer sehr kurzen Zeit dt liefern können, ist bestimmt durch das Product aus den Intensitäten der beiden Ströme in die Änderung dV, welche die Grösse V in der Zeit dt erleidet. V ist das Potential der beiden Leitungen aufeinander, wenn jede derselben von der Stromeinheit durchflossen wird, und heisst $ii'V$ das Potential der diese zwei Leitungen durchfliessenden Ströme i und i' auf einander. In der Abhandlung über die Grundformeln der Elektrodynamik [1] ist abweichend von der hier angenommenen Definition die Grösse $-ii'V$ Potential der beiden Ströme auf einander genannt worden.

Es ist also die von den beiden Leitern in der Zeit dt bei der eingetretenen Bewegung gewonnene lebendige Kraft gegeben durch

$$dL = (J-dJ)\,(J'-dJ')dV.$$

[1] Sitzungsberichte LIX.

Lässt man während eines zweiten, gleich grossen Zeitelementes dt mit Hilfe einer äusseren Kraft die beiden Leiter dieselbe Bewegung in umgekehrter Weise machen, so dass sie nach der Zeit dt wieder in ihre ursprünglichen Positionen gelangen, so sind der Erfahrung gemäss die Stromintensitäten während dieser Zeit grössere als J und J' und zwar um so viel grösser, als sie während des ersten Zeitelementes dt kleiner waren. Sie sind also $J+dJ$ und $J'+dJ'$.

Die von den chemischen Kräften während des zweiten Zeitelementes dt gelieferte Energie ist

$$dA_1 = e(J+dJ)dt + e'(J'+dJ')dt$$

die in den Leitern gleichzeitig erzeugte Wärme

$$dB_1 = w(J+dJ)^2 dt + w'(J'+dJ')^2 dt$$

und die äussere Arbeit

$$dL_1 = -(J+dJ)(J'+dJ')dV.$$

Werden am Ende des zweiten Zeitelementes die beiden Leiter wieder festgehalten, so ist alles wieder in demselben Zustande, wie vor den ausgeführten Bewegungen und nach dem aufgestellten Princip muss die von den chemischen Kräften gelieferte Energie gleich sein der entwickelten Wärme und der gewonnenen äusseren Arbeit, also

$$dA + dA_1 = dB + dB_1 + dL + dL_1.$$

Setzt man die angegebenen Werthe ein, so reducirt sich diese Gleichung unter Benützung der Formeln (5) auf

$$wdJ^2 + w'dJ'^2 - (JdJ'+J'dJ)\frac{dV}{dt} = 0$$

und diese zerfällt in

$$wdJ = J'\frac{dV}{dt}, \quad w'dJ' = J\frac{dV}{dt} \tag{6}$$

oder wenn man mit ε und ε' die elektromotorischen Kräfte, welche diesen inducirten Strömen dJ und dJ' entsprechen, bezeichnet, also

$$\varepsilon = wdJ, \quad \varepsilon' = w'dJ'$$

setzt, so erhält man für dieselben

$$\varepsilon = J'\frac{dV}{dt}, \quad \varepsilon' = J\frac{dV}{dt} \tag{7}$$

also die nämlichen Formeln, welche aus den Theorien von Neumann und Weber folgen.

III.

Betrachtet man nun die erste Hälfte des ausgeführten Kreisprocesses für sich, und führt die für dJ und dJ' gefundenen Werthe in die Ausdrücke für dA, dB und dL, so erhält man

$$dA—dB—dL = JJ'dV—dJdJ'dV,$$

d. h. es ist um den Betrag von $JJ'dV—dJdJ'dV$ mehr an chemischer Energie consumirt worden, als in der erzeugten Wärme und lebendigen Kraft wieder zu finden ist.

Betrachtet man in derselben Weise die zweite Hälfte des Processes, so ist

$$dA_1—dB_1—dL_1 = —JJ'dV + dJdJ'dV,$$

d. h. es ist um die Grösse $JJ'dV—dJdJ'dV$ mehr Wärme erzeugt worden, als dem Consum an chemischer Energie und dem Aufwand äusserer Arbeit entspricht.

Der Verlust an Wärme in der ersten Hälfte des Kreisprocesses wird aufgehoben durch den Gewinn während der zweiten Hälfte und bleibt für den ganzen Process das aufgestellte Princip aufrecht. Es gilt jedoch nicht mehr für jede Hälfte des Processes für sich, ausgenommen den in der Abhandlung über die Erhaltung der Kraft betrachteten Fall, in welchem eine der beiden Stromintensitäten und die Änderung der anderen gleich Null genommen ist, denn dann verschwinden die störenden Glieder.

Sind die beiden Stromstärken J und J' so gross und ihre Änderungen dJ und dJ' so klein, dass diese gegen die ersteren

vernachlässigt werden dürfen, so kann $JJ'dV$ auch als Mass der in der ersten Hälfte des Processes gewonnenen lebendigen Kraft und der während der zweiten Hälfte des Processes aufgewendeten Arbeit angenommen werden. Es lässt sich dann das gefundene Resultat in folgender Weise aussprechen: Die von den elektrodynamischen Kräften geleistete Arbeit erfordert den Verbrauch eines doppelten Äquivalentes von Wärme, die zur Überwindung der elektrodynamischen Kräfte aufgewendete Arbeit liefert das doppelte Äquivalent von Wärme.

Das Verhalten der elektrodynamischen Kräfte ist daher im allgemeinen ein ganz anderes, als das der elektromagnetischen. Denn bei den durch letztere erzeugten Bewegungen oder bei der Überwindung solcher Kräfte tritt für jedes Element einer Lagenänderung eine gleichzeitige vollständige Compensation von Arbeit und Wärme ein.

Es ist nun noch von Interesse, die Wirkungen der magnetischen Kräfte zu betrachten, da ja diese nach Ampère's Theorie ebenfalls als elektrodynamische zu betrachten sind.

Zwei Magnete bilden eine Quelle von lebendiger Kraft, welche thätig wird, sobald die Magnete ihrer Wechselwirkung folgen können. Die erzeugte lebendige Kraft erscheint als ein Gewinn, welcher von keinem gleichzeitigen Verbrauch einer äquivalenten Menge von Wärme oder einer andern wahrnehmbaren Action begleitet ist. Erst wenn man die Magnete in ihre ursprünglichen Lagen wieder zurückführt, ist eine der früher gewonnenen lebendigen Kraft äquivalente Arbeit aufzuwenden. Ebenso verhält es sich, wenn ein Magnet weiches Eisen anzieht und dadurch eine Arbeit leistet. Erst die Zurückführung des Eisens in seine ursprüngliche Lage bringt das Äquivalent der früher gewonnenen Arbeit wieder zum Verbrauch.

Es compensiren sich also bei diesen Processen, wie es zum Theil bei den elektrodynamischen der Fall ist, soweit es sich um wahrnehmbare Vorgänge handelt, zwei zeitlich getrennte Vorgänge aber der Art, dass immer Arbeit für Arbeit gewonnen oder geleistet wird. Eine Ausnahme gestattet der Fall der Anziehung weichen Eisens durch einen Magnet. Ist durch diese Anziehung Arbeit gewonnen, so kann das weiche Eisen auch

ohne Aufwand von Arbeit in seine ursprüngliche Lage gebracht werden, wenn man es vor der Wegführung so weit erhitzt, dass es seinen Magnetismus verliert, dann dasselbe in seine ursprüngliche Lage führt, wobei die Anziehung des Magneten nicht mehr zu überwinden ist, und in dieser Lage auf die ursprüngliche Temperatur wieder abkühlt. Bei diesem Processe wird Arbeit ohne Gegenaufwand von Arbeit gewonnen. Dieser Fall soll an einer anderen Stelle dieser Abhandlung in specielle Untersuchung genommen werden.

Um diese drei Wirkungsarten nochmals zusammenzufassen, hat man also

1. bei magnetischen Kräften Arbeitsgewinn ohne Wärmeaufwand oder Arbeitsaufwand ohne Wärmegewinn,
2. bei elektromagnetischen Kräften Arbeitsgewinn für den äquivalenten Wärmeaufwand oder Wärmegewinn für den äquivalenten Arbeitsaufwand,
3. bei elektrodynamischen Kräften Arbeitsgewinn für den doppelten äquivalenten Wärmeaufwand oder doppelten Wärmegewinn für den einfachen Arbeitsaufwand.

Es ist jedoch nicht zu übersehen, dass diese letzte Beziehung nicht allgemein, sondern nur für Ströme, welche die durch Bewegung erzeugten Inductionsströme an Intensität bedeutend übertreffen, giltig ist. So z. B. nähert sich das Gesetz der Arbeitsverwandlung immer mehr dem für elektromagnetische Kräfte giltigen, je kleiner die Intensität des Stromes in einem der beiden Leiter wird.

Bei den Wirkungen der aufgeführten drei Arten von Kräften treten übrigens noch andere Unterschiede auf, an die ich hier ebenfalls erinnern will.

Zwei Magnete, welche z. B. durch ihre wechselseitige Anziehung lebendige Kraft erzeugen, werden, während sie arbeiten, stärker. Sie werden schwächer, wenn sie unter Aufwand äusserer Arbeit von einander entfernt werden.

Bewegt ein elektrischer Strom einen Magnet, so wird der elektrische Strom, während er arbeitet, schwächer, der Magnet stärker. Das umgekehrte tritt ein, wenn der Magnet unter Aufwand von äusserer Arbeit gegen die elektromagnetischen Kräfte bewegt wird.

Endlich, bewegen sich zwei von elektrischen Strömen durchflossene Leiter in Folge ihrer elektrodynamischen Wechselwirkung, so werden beide Ströme schwächer, im Falle einer aufgezwungenen entgegengesetzten Bewegung aber beide stärker.

IV.

Die Untersuchung jeder der zwei Hälften des beschriebenen Processes für sich führt nun nothwendig zur Folgerung, dass die chemischen Kräfte einer Kette nicht nur zur Erzeugung von Wärme und lebendiger Kraft aufgewendet werden, sondern dass ihnen noch eine andere Leistung obliegt. Dies gilt, wenn die elektrodynamischen Kräfte Arbeit erzeugen. Im andern Falle aber, in welchem zur Ueberwindung der elektrodynamischen Kräfte Arbeit aufgewendet wird, wird nicht nur diese und die gleichzeitig von den chemischen Kräften entwickelte Energie in Wärme verwandelt, sondern es schliesst sich zugleich noch eine neue Wärmequelle auf.

Der Ausdruck für die in dem einen Falle verlorene, in dem andern Falle aber gewonnene Arbeitsgrösse, nämlich $JJ'dV$, ist die Zunahme des Potentials der beiden Leiter auf einander in dem ersten oder die Abnahme desselben im zweiten Falle. Es folgt also der Satz, dass das Potential der beiden Ströme auf einander eine reell existirende, aus den chemischen Kräften der Ketten erzeugte Energie darstellt, zu deren Vergrösserung neue Arbeit der chemischen Kräfte erfordert wird, deren Verkleinerung die Umwandlung dieser Arbeit in Wärme zur Folge hat.

Nebst dem Potentiale der beiden Ströme auf einander existirt aber noch für jeden Strom sein Potential auf sich selbst, welches für die Bewegungen der einzelnen Theile des Leiters gegen einander in ähnlicher Weise die von den elektrodynamischen Kräften geleistete oder zu ihrer Ueberwindung aufgewendete Arbeit ausdrückt, wie das Potential der beiden Leiter auf einander für die relative Bewegung dieser beiden. Das Potential des Stromes i auf sich selbst, ist dem Quadrate der Stromintensität gleich, multiplicirt mit einer von der Gestalt des Leiters

abhängigen Grösse. Sie soll künftig immer mit U bezeichnet werden, so dass i^2U das Potential des einen Stromes auf sich selbst bedeuten soll. Ebenso soll i'^2U' das Potential des zweiten Stromes auf sich selbst darstellen. Die Summe

$$i^2U + i'^2U' + ii'V$$

ist das Gesammtpotential des Systems der beiden Ströme.

Was nun für das Potential zweier Ströme auf einander gilt, nämlich, dass es eine reell existirende Energie ausdrückt, gilt auch für das Gesammtpotential, und wenn nur ein Strom vorhanden ist, für das Potential dieses auf sich selbst.

Es lässt sich dies auch durch eine der vorhergehenden ähnliche Betrachtung nachweisen.

In dem Leiter vom Widerstande w sei die constante Stromintensität J erzeugt durch die elektromotorische Kraft e. Können die einzelnen Leitertheile den elektrodynamischen Kräften folgen, so gewinnt man in der Zeit dt die Arbeit dL und zugleich hat der Strom während dt eine kleinere Intensität $J-dJ$. Wenn nun dA, dB, die während der Zeit dt in der Kette entwickelte chemische Energie, und die in derselben Zeit entwickelte Wärme bedeuten, so hat man

$$dA = e(J-dJ)dt$$
$$dB = w(J-dJ)^2dt$$
$$dL = (J-dJ)^2dU.$$

Führt man während eines zweiten Zeittheilchens dt die Leitertheile wieder in ihre ursprüngliche Position zurück, so hat der Strom während dieser Zeit die Intensität $J+dJ$, und bedeuten dA_1, dB_1, dL_1 die während dieses zweiten dt gelieferten Mengen von chemischer Energie, Wärme und äusserer Arbeit, so ist

$$dA_1 = e(J+dJ)dt$$
$$dB_1 = w(J+dJ)^2dt$$
$$dL_1 = -(J+dJ)^2dU.$$

Werden die Leitertheile am Ende des zweiten Zeittheilchens wieder festgehalten, so muss für den ausgeführten Kreisprocess

$$dA+dA_1 = dB+dB_1+dL+dL_1$$

sein und man erhält nach Einsetzung der obigen Werthe

$$wdJ = 2J\frac{dU}{dt}$$

dieselbe Formel für die elektromotorische Kraft des Inductionsstroms, wie sie die Theorien von Weber und Neumann liefern.

Betrachtet man aber die beiden Hälften des ausgeführten Processes gesondert, so findet man unter Benützung des gefundenen Werthes von wdJ

$$dA - dB - dL = J^2 dU - dJ^2 dU$$
$$dA_1 - dB_1 - dL_1 = -J^2 dU + dJ^2 dU,$$

also im ersten Falle einen Mehrconsum von chemischer Energie, im zweiten Falle eine Mehrentwicklung von Wärme um eine Grösse, welche genähert die Zunahme des Potentials des Stromes auf sich selbst im ersten, die Abnahme im zweiten Falle bedeutet.

Es hat auch gerade die Untersuchung der Inductionsströme, welche ein Leiter bei Schwankungen der Stromintensität in sich selbst erzeugt, zuerst zur Annahme genöthigt, dass die chemischen Kräfte der Kette bei der Schliessung des Stromes eine in der gleichzeitig entwickelten Wärme nicht compensirte Arbeit zu leisten haben, welche dann erst bei Öffnung des Stromes wieder als Wärme in der Leitung zum Vorschein kommt. Es ist dies von Helmholtz [1] und Koosen [2] dargethan worden und schon früher hat Thomson [3] einen dem Potential eines Stromes auf sich selbst entsprechenden Ausdruck als actuelle Energie des Stromes in Rechnung gezogen.

Es hat auch Thomson schon längst die Beziehungen des Principes der Erhaltung der Kraft zu den Gesetzen der durch Magnete und elektrische Ströme erzeugten Bewegungen untersucht, es haben aber seine Arbeiten wenig Verbreitung gefunden. Ich kenne auch von denselben nicht mehr, als die Andeutungen, welche in Tait's Geschichte der mechanischen Theorie der

[1] Poggendorff's Annalen XCI. 258.
Pogg. Ann. XCI. 427.
[3] Philosophical Magazine (4. sér.) V. 393.

Wärme sich finden. Es wird daselbst mitgetheilt, dass Thomson die Energie eines elektrischen Stromes als actuelle Energie, d. h. als Bewegung von Materie betrachtet. Diese Materie kann aber nicht die im Stromleiter circulirende Elektricität allein sein, weil die Energie des Stromes abhängt von der Form der Leitung, von der Natur des umgebenden Mittels, von der Beschaffenheit der in der Umgebung befindlichen Körper. Thomson sucht diese Bewegung nicht in dem Leiter selbst, sondern in dem Raume, über welchen sich die magnetische Action des Stromes erstreckt, und er gibt die Gründe an, aus denen folgt, dass diese Bewegung eine rotatorische sei, um die magnetischen Kraftlinien als Axen.

Die Centrifugalkraft, die diesen Wirbelbewegungen zukömmt, ist auch die Ursache der magnetischen Anziehung und Abstossung. Die Abhandlung selbst, welche diese Entwicklungen enthält, ist citirt als Artikel Magnetismus in Nichol's Cyclopaedia.

Der Satz, dass das Gesammtpotential zweier Ströme eine Energie (intrinsic energy of currents) darstellt, ist auch in Maxwell's Dynamical Theory of the electro-magnetic field [1] entwickelt. Er ist auch von Briot [2] aus der Weber'schen Theorie der Induction abgeleitet worden und findet sich auch in der Abhandlung von Helmholtz über die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper [3]. Ich habe übrigens diesen Satz selbstständig auf die hier vorgetragene Weise gefunden.

Eine Ansicht über die Natur dieser Energie ist nur von Thomson ausgesprochen worden. Ob diese die richtige ist, oder ob die Energie nur in einer relativen Verschiebung der Theilchen des umgebenden Mediums oder in einer andern Form von Arbeit bestehe, braucht hier nicht entschieden zu werden. Ich will im Folgenden auch nur den allgemeinen, durch seine Einfachheit sich empfehlenden Ausdruck Potential für diese Energie gebrauchen, und z. B. sagen, die chemischen Kräfte einer Kette erzeugen ein Potential oder ein Potential verwandelt sich in Wärme.

---

[1] Philosophical Transactions. London CLV. 470.

[2] Théorie mécanique de la chaleur.

[3] Borchardt's Journal LXXII. 71.

V.

Mit Hilfe des Satzes, dass die Potentialerzeugung und demnach auch jede Potentialvermehrung an und für sich einen Arbeitsaufwand erfordert, und umgekehrt jede Potentialvernichtung und demnach auch Potentialverminderung eine Entwicklung von Arbeit oder Wärme bedingt, lassen sich die Gesetze der Induction in allgemeinster Weise entwickeln.

So werden die Gesetze der inductorischen Wirkungen, die ein Leiter auf sich selbst ausüben kann, auf folgende Weise gewonnen.

Die in dem Leiter thätige elektromotorische Kraft e liefert in der Zeit dt, wenn während derselben der Strom i den Leiter durchströmt, die Arbeitsgrösse

$$eidt.$$

Die in derselben Zeit in der Leitung entwickelte Wärme ist

$$wi^2dt.$$

Erfährt die Leitung während dieser Zeit in Folge der zwischen den einzelnen Theilen der Leitung thätigen elektrodynamischen Kräfte eine Formänderung, so wird die dabei gewonnene lebendige Kraft oder Arbeit ausgedrückt durch die Änderung des Potentials des Leiters auf sich selbst, die Stromstärke constant gedacht, also durch

$$i^2dU,$$

zugleich erfährt auch das Potential als Ganzes, da auch die Stromintensität im allgemeinen sich ändert, den Zuwachs

$$d(i^2U)$$

und es ist

$$eidt = wi^2dt + i^2dU + d(i^2U)$$

zu setzen, woraus

$$wi = e - 2i\frac{dU}{dt} - 2U\frac{di}{dt}$$

folgt. Darin stellt $2i\frac{dU}{dt}$ die elektromotorische Kraft des durch

die Formänderung des Leiters, $2U\frac{di}{dt}$ die elektromotorische Kraft des durch die Änderung der Stromintensität erzeugten Inductionsstromes.

Auf dieselbe Art erhält man auch die Gleichungen für die Bewegung der Elektricität in zwei Leitern. Sind in diesen die elektromotorischen Kräfte e und e' thätig, sind i und i' die Stromstärken zur Zeit t, so liefern die chemischen Kräfte der Ketten in der Zeit dt die Arbeitsmengen

$$(ei+e'i')dt.$$

Daraus werden in derselben Zeit in den beiden Leitungen die Wärmemengen

$$(wi^2+w'i'^2)dt$$

entwickelt.

Werden die einzelnen Theile der Leiter und beide Leiter gegeneinander durch die elektrodynamischen Kräfte bewegt, so ist die gewonnene lebendige Kraft

$$i^2dU+i'^2dU'+ii'dV$$

wenn wieder U das Potential des ersten, U' das des zweiten Leiters auf sich selbst, V das Potential der beiden Leiter auf einander unter der Voraussetzung, dass die Stromstärken der Einheit gleich sind, bedeutet.

Endlich ist aus den chemischen Kräften noch die allgemeine Änderung des Gesammtpotentials zu leisten, nämlich

$$d(i^2U+i'^2U'+ii'V)$$

man hat sonach die Gleichung

$$(ei+e'i')dt = (wi^2+w'i'^2)dt+i^2dU+i'^2dU'+ii'dV \\ +d(i^2U+i'^2U'+ii'V)$$

welche man auf die Form

$$\left[e-wi-\frac{d}{dt}(2iU+i'V)\right]i+\left[e'-w'i'-\frac{d}{dt}(2i'U'+iV)\right]i'=0$$

bringen und in folgende zwei zerlegen kann:

$$(8)\qquad \begin{aligned} e &= wi + \frac{d}{dt}(2iU+i'V) \\ e' &= w'i'+\frac{d}{dt}(2i'U'+iV) \end{aligned}$$

welche zwei Gleichungen auch schon bei Maxwell und Briot sich finden.

Zu diesen beiden kommt nun noch die Gleichung für die den beiden Stromleitern von den elektrodynamischen und äusseren Kräften ertheilte lebendige Kraft. Wird die Arbeit, welche die äusseren Kräfte in der Zeit dt leisten mit dA bezeichnet, der Zuwachs, den die Leiter an lebendiger Kraft in dieser Zeit dt erfahren, mit dL, so ist dieser durch

$$(9)\qquad dL = dA+i^2dU+i'^2dU'+ii'dV$$

bestimmt.

VI.

Aus den vorhergehenden Formeln lassen sich nun die Aufwände an chemischer Energie in jeder der beiden Ketten berechnen. Multiplicirt man die erste derselben mit idt, so folgt

$$\begin{aligned} eidt &= wi^2dt+id(2iU+i'V) \\ &= wi^2dt+i^2dU+d(i^2U)+id(i'V). \end{aligned}$$

Aus den chemischen Kräften der ersten Kette wird also die in ihrer Strombahn entwickelte Wärme die ganze bei Änderungen dieser Bahn entwickelte lebendige Kraft und die Zunahme des Potentials dieser Bahn auf sich selbst geliefert, nebstdem aber auch ein Theil der durch Änderung in der relativen Lage der beiden Leiter hervorgerufenen lebendigen Kraft und des damit verbundenen Wachsthums des Potentials der beiden Leiter auf einander. Nur zu den letzten beiden Grössen tragen beide Ketten gemeinschaftlich bei und zwar die erste den Antheil $id(Vi')$, die zweite den Antheil $i'd(Vi)$.

Bleiben beide Leiter ihrer Gestalt und relativen Lage nach unverändert, so ist V constant, die beiden Ketten haben dann keine lebendige Kraft, sondern ausser der Wärme nur noch die Potentialvergrösserung zu liefern, die erste den Antheil $Vidi'$, die zweite den Antheil $Vi'di$, also trägt jede der beiden Ketten in dem

Verhältnisse zur Stärke ihres Stromes und des Wachsthums des Stromes der anderen zu dieser gemeinsamen Leistung bei.

Es soll nun der specielle Fall betrachtet werden, dass eine Kette in der Nähe einer zweiten geschlossenen Leitung, welche aber keine eigenthümliche elektromotorische Kraft besitzt, geschlossen wird. Die Gleichungen (8) vereinfachen sich dann in

$$e = wi + 2U\frac{di}{dt} + V\frac{di'}{dt}$$

$$0 = w'i' + 2U'\frac{di'}{dt} + V\frac{di}{dt}$$

mit der Bedingung, dass zu Beginn der Zeit sowohl $i = 0$ als auch $i' = 0$ ist. Da U, U', V in diesem Falle constant sind, so lassen sich die Gleichungen leicht integriren. Es ergibt sich, dass der Strom i allmälig bis zur Stärke $\frac{e}{w}$ ansteigt, i' hat nur während des Wachsthums des i von Null verschiedene und zwar negative Werthe, es ist der Strom i' dem Strom i entgegengesetzt gerichtet.

Multiplicirt man die erste der Gleichungen mit idt, die zweite mit $i'dt$ und integrirt beide von 0 bis t, so wird

$$\int_0^t eidt = \int_0^t wi^2dt + Ui^2 + V\int_0^t idi', \quad 0 = \int_0^t w'i'^2dt + U'i'^2 + V\int_0^t i'di.$$

Hat die Zeit t einen so grossen Werth, dass für selbe i schon als constant und demnach $i' = 0$ angenommen werden kann, so ist für dieses t

$$U'i'^2 = 0 \quad Vii' = 0.$$

Addirt man beide Gleichungen, so bleibt

$$\int_0^t eidt = \int_0^t wi^2dt + \int_0^t w'i'^2dt + Ui^2,$$

d. h. aus den chemischen Kräften der ersten Kette ist sowohl die in ihrer Leitung als auch die im Nebendrahte erzeugte Wärme und nebstdem noch das Potential der ersten Leitung auf sich selbst erzeugt worden.

Besonders merkwürdig ist der Fall, in welchem in einer Kette durch die Anwesenheit einer zweiten die Strombewegung nicht beeinflusst wird. Er tritt ein, wenn Vi' constant ist, dann verwandelt sich die erste der Gleichungen (8) in

$$e = wi + \frac{d}{dt}(2Ui)$$

in welcher keine von der zweiten Kette abhängige Grösse vorkommt.

Es ist nun Vi' constant, wenn z. B. die beiden Leitungen unverändert gehalten werden, also U, U', V constant bleiben und auch die Stromstärke i' constant ist. Die zweite der Gleichungen (8) gibt aber dann

$$e' = w'i' + V\frac{di}{dt}$$

es muss also die elektromotorische Kraft der zweiten Kette eine variable sein, sie muss steigen, wenn der Strom in der ersten Kette steigt und umgekehrt. Wird z. B. die erste Kette neben der zweiten geschlossen, so entsteht in Folge der Anwesenheit der zweiten kein Inductionsstrom in der ersten, da jetzt die Erzeugung des Potentials beider Leitungen auf einander die zweite Kette allein übernimmt.

Werden die beiden Leitungen in derselben Gestalt erhalten aber relativ gegen einander verschoben, so bleiben U und U' constant, nicht aber V. Die erste der Gleichungen (8) verwandelt sich dann in

$$e = wi + 2U\frac{di}{dt} + i'\frac{dV}{dt}.$$

Die in der Zeit dt in der ersten Kette entwickelte chemische Energie ist

$$eidt = wi^2dt + d(Ui^2) + ii'dV$$

es wird also die aus den elektrodynamischen Kräften erzeugte lebendige Kraft von den chemischen Kräften der ersten Kette geliefert, die Potentialvermehrung wieder von den Kräften der zweiten Kette.

Es lehrt die erste der Gleichungen (8), dass die erste Kette immer nur die durch die elektrodynamischen Kräfte erzeugte lebendige Kraft allein aus ihrer chemischen Energie zu liefern hat, wenn die Stromintensität in der zweiten Leitung constant erhalten wird. Letzteres ist möglich durch das Vorhandensein einer variablen elektromotorischen Kraft, deren Grösse nach dem Bedarf sich richtet. Es ist dies aber auch bei einer constanten elektromotorischen Kraft in der zweiten Leitung möglich, wenn die Gestalt dieser Leitung in bestimmter Weise sich ändern kann, so dass das Potential derselben auf sich selbst einer Verminderung oder Vergrösserung fähig ist. Wie die zweite der Gleichungen (8) lehrt, kann bei constantem e' und i' das gemeinsame Potential Vii' wachsen auf Kosten des Potentials der zweiten Leitung auf sich selbst, ohne dass von der ersten Kette dabei mehr als die erzeugte lebendige Kraft zu leisten ist.

Dieser Fall entspricht nun dem Verhalten der elektromagnetischen Wirkungen und ist damit der Weg angezeigt, wie sich diese als specieller Fall der elektrodynamischen werden darstellen lassen. Diese Darstellung soll nun im folgenden ausgeführt werden.

VII.

An die Stelle des zweiten Stromes, dessen Intensität oben mit i' bezeichnet wurde, setze ich ein System von Strömen von gleicher und constanter Intensität, die ebenfalls i' heissen soll. Die Bahnen dieser Ströme sollen ohne Widerstand sein, es sind daher zur ungeschwächten Fortdauer dieser Ströme keine elektromotorischen Kräfte nöthig. Der Art sind die Ströme, welche nach Ampère die Moleküle der Magnete umfliessen.

Die Potentiale der einzelnen Ströme dieses Systems auf sich selbst sollen bezeichnet werden mit

$$i'^2u_1,\ i'^2u_2,\ i'^2u_3,$$

die Potentiale je zweier auf einander mit

$$i'^2v_{12},\ i'^2v_{13},\ i'^2v_{23},$$

endlich ihre Potentiale auf den Strom i mit

$$ii'V_1,\ ii'V_2,\ ii'V_3,$$

An die Stelle der Gleichungen (8) tritt jetzt folgendes System von Gleichungen:

$$e = wi + \frac{d}{dt}(2iU + i'V_1 + i'V_2 + \cdot \qquad)$$

$$0 = \frac{d}{dt}(2i'u_1 + i'v_{12} + i'v_{13} + \qquad + iV_1)$$

$$0 = \frac{d}{dt}(2i'u_2 + i'v_{12} + i'v_{23} + \qquad + iV_2).$$

Multiplicirt man die Gleichungen von der zweiten an alle mit i' und addirt sie sodann, so folgt

$$0 = \frac{d}{dt}\left[2i'^2(u_1 + u_2 + \ldots + v_{12} + v_{13} + \ldots) + ii'(V_1 + V_2 + \ldots)\right].$$

Es ist aber, wenn man

$$i'^2(u_1 + u_2 + \cdot \qquad + v_{12} + v_{13} + \qquad) = P$$

setzt, P das Gesammtpotential des angenommenen Stromsystems. Ferner ist, wenn man

$$i'(V_1 + V_2 + \qquad) = W$$

setzt, W das Potential des angenommenen Stromsystems auf den ersten Stromleiter, dieser aber statt vom Strom i von der Einheit des Stromes durchflossen gedacht. Die obigen Gleichungen kann man nunmehr ersetzen durch

$$e = wi + \frac{d}{dt}(2iU + W) \tag{10}$$

$$0 = \frac{d}{dt}(2P + iW) \tag{11}$$

und die Gleichung (9) verwandelt sich in

$$dL = dA + i^2 dU + dP + idW. \tag{12}$$

Was die Vorgänge in der vom Strom i durchflossenen Leitung anbetrifft, so sind dieselben im jetzigen Falle die nämlichen, wie in dem eingangs citirten, in welchem ein Strom einen Magnet bewegt. Multiplicirt man nämlich die Gleichung (10) mit idt, so wird

$$eidt = widt + 2id(iU) + idW$$

und diese Formel fällt mit der Formel (3) zusammen bis auf das Glied $2id(iU)$, welches in (3) nicht vorkommt, weil bei Aufstellung dieser auf die Induction eines Leiters auf sich selbst keine Rücksicht genommen worden ist.

Ein Magnet lässt sich also in Bezug auf seine inductorische Wirkung auf einen Stromleiter ersetzen durch ein System von Strömen, welche in widerstandsfreien Bahnen mit unveränderlicher Stärke fliessen.

Die eingehendere Discussion der Vorgänge, welche die Wirkungen elektromagnetischer Kräfte begleiten, wird in einem späteren Abschnitte gegeben werden.

VIII.

Ich will nun annehmen, dass die emzelnen Bahnen der Ströme des Systems derart orientirt sind, dass die elektrodynamischen Wirkungen derselben nach aussen sich wechselseitig aufheben. Zwei sehr nahe an einander in einer Ebene liegende Ströme, welche unendlich kleine aber gleich grosse Flächen in entgegengesetztem Sinne umfliessen, entsprechen dieser Bedingung und auch ein System von solchen Strompaaren oder Gruppen von Strompaaren. Da in Bezug auf die Wirkung nach aussen jeder Elementarstrom durch einen Elementarmagnet ersetzt werden kann, so stellt jedes solche Strompaar ein astatisches Magnetpaar vor.

Ein System von solchen, übrigens beliebig orientirten Strompaaren ist ebenfalls astatisch und kann als Repräsentant eines Stückes weichen Eisens dienen. Gewöhnlich pflegt man ein Stück weichen Eisens als ein Aggregat von sehr vielen nach allen möglichen Richtungen orientirten Elementarmagneten zu betrachten oder was dasselbe ist, als ein System von Molekülen, welche

von elektrischen Strömen umflossen werden, so dass die Bahnen der einzelnen Molekularströme in allen möglichen Ebenen liegen. Die Vorstellung der astatischen Moleküle ist jedoch insofern einfacher, weil sie unmittelbar zur Folgerung führt, dass jede die Astasie aufhebende Verschiebung der Bestandtheile eines solchen Moleküls einen Aufwand von Arbeit erfordert.

Das astatische Stromsystem sei für sich allein unter dem Einfluss der inneren elektrodynamischen und vielleicht noch anderer Kräfte im Gleichgewichte. Wird nun in der Nähe dieses Systems eine Kette geschlossen, so kommen zu den inneren Kräften die äusseren elektrodynamischen hinzu und diese bewirken nun eine Änderung in den Lagen der einzelnen Theile jedes Strompaares und stellt sich schliesslich eine neue Gleichgewichtsstellung im Innern des Systems her.

In der ursprünglichen Lage des Systems war seine Wirkung nach aussen Null, also auch die mit W bezeichnete Grösse und somit auch das gemeinsame Potential iW. Während der Überführung des Systems in die neue Lage wird gemeinsames Potential erzeugt, und zwar ist der Zuwachs desselben während eines Zeitelementes dt bestimmt durch $d(iW)$.

Zugleich ändert sich aber auch das Potential des Stromsystems auf sich selbst und zwar derjenige Theil desselben, welcher oben mit

$$i'^2(v_{12}+v_{13}+v_{23}+ \qquad)$$

bezeichnet wurde. Es ist nun, da i' constant ist und auch die Potentiale der einzelnen Elementarströme auf sich selbst als unveränderlich angenommen werden

$$i'^2 d(v_{12}+v_{13}+v_{23}+ \qquad) = dP.$$

Nach Gleichung (11) ist nun

$$dP = -\tfrac{1}{2}d(iW).$$

Die Abnahme des Potentials des Stromsystems auf sich selbst bildet also das halbe Äquivalent der Zunahme des gemeinsamen Potentials. Die andere Hälfte des Äquivalentes muss daher von den chemischen Kräften der Kette geliefert werden.

Der Aufwand an chemischer Energie ist aber nach Gleichung (10) gegeben durch idW.

Kommen nun ausser den äusseren und inneren elektrodynamischen Kräften keine anderen ins Spiel, erhalten auch weder der erste Stromleiter noch die einzelnen Leiter des Stromsystems eine lebendige Kraft, so ist in der Gleichung (12)

$$dL = dA = i^2 dU = 0$$

zu setzen und es bleibt

$$idW + dP = 0$$

es folgt also daraus

$$idW = -dP = \tfrac{1}{2} d(iW) \tag{13}$$

d. h. die chemischen Kräfte der Kette erzeugen die zweite Hälfte des gemeinsamen Potentials und haben weiter keine andere durch die Anwesenheit des Stromsystems bedingte Leistung zu liefern.

Aus der Formel (13) folgt aber auch

$$idW = Wdi$$

und wenn man unter k die Integrationsconstante versteht

$$W = ki \tag{14}$$

Ferner folgt aus (13) mit Benützung von (14) die gesammte von den chemischen Kräften zur Überführung des Stromsystems in die Position, in welcher das gemeinsame Potential den Endwerth iW hat, zu leistende Arbeit

$$\int idW = P_0 - P = \tfrac{1}{2} iW = \tfrac{1}{2} ki^2 \tag{15}$$

worin P_0 den Anfangswerth des Potentials des Stromsystems auf sich selbst bedeutet.

Die Formeln (14) und (15) stellen zwei merkwürdige Sätze dar, welche für die Vorgänge bei der Magnetisirung des weichen Eisens auch durch andere Betrachtungen schon gefunden worden sind.

Durch die Grösse W ist wenigstens bei schwacher Magnetisirung die Stärke der Fernwirkung des magnetisirten Eisens

bestimmt, diese ist daher, wie die Formel (14) lehrt, der Intensität des magnetisirenden Stromes proportional.

Den während der Magnetisirung des weichen Eisens in der Kette gemachten Mehraufwand von chemischer Energie nennt man die Magnetisirungsarbeit. Diese ist nach der Formel (15) proportional dem Quadrate der Intensität des magnetisirenden Stromes und sie ist gleich dem halben Potential des magnetisirten Eisens auf den magnetisirenden Strom.

Während der Magnetisirung nimmt das Gesammtpotential des Stromsystems, welches das weiche Eisen repräsentirt, um $P_0 - P$ ab. Diese Grösse ist äquivalent dem, was man in der Theorie des Magnetismus Potential der getrennten magnetischen Fluida auf einander nennt. Nennen wir diese Grösse magnetisches Potential, so lässt sich die Formel (15) in die zwei Sätze zusammenfassen:

Das magnetische Potential des magnetisirten Eisens ist gleich seinem halben elektromagnetischen Potential auf den magnetisirenden Strom.

Die Magnetisirungsarbeit ist gleich dem magnetischen Potential.

Mit Hilfe der Formel (14) ist es nun möglich, die Vorgänge in der Leitung des magnetisirenden Stromes in sehr einfacher Weise zu berechnen. Setzt man den durch (14) gegebenen Werth von W in (10), so wird

$$e = wi + 2\frac{d}{dt}(iU) + k\frac{di}{dt}.$$

Wird die Gestalt des Stromes unverändert erhalten, ist also U constant, so ist

$$e = wi + (2U + k)\frac{di}{dt}. \tag{16}$$

Das Integral dieser Gleichung ist unter der Bedingung, dass

$$i = 0 \text{ für } t = 0$$

gegeben durch die Formel

$$i = \frac{e}{w}\left(1 - e^{-\frac{wt}{2U+k}}\right)$$

und gibt diese Formel das Gesetz des Anwachsens des Stromes bis zum Endwerthe $\frac{e}{w}$, wenn er in der Nähe eines Eisenkerns geschlossen wird.

Ist dieser Endwerth erreicht, so tritt keine weitere Veränderung im weichen Eisen mehr ein, es bleibt mit i auch W und P constant.

Wird der Strom unterbrochen, setzt man also die elektromotorische Kraft in der Gleichung (16) $= 0$ und

$$i = \frac{e}{w} \text{ für } t = 0$$

so erhält man

$$i = \frac{e}{w}\, e^{-\frac{wt}{2U+k}}$$

welche Formel das Gesetz für den Verlauf des Öffnungsstromes darstellt. Die von diesem entwickelte Wärmemenge ist

$$\int_0^\infty wi^2 dt = \frac{e^2}{w^2}\left(U + \frac{k}{2}\right) = i^2 U + \frac{ki^2}{2}$$

und stellt eben das letzte Glied dieser Formel den durch Umwandlung der Magnetisirungsarbeit gewonnenen Wärmeantheil dar.

IX.

Ist die Wechselwirkung zwischen dem äusseren elektrischen Strom und den Elementarströmen in dem angenommenen System nicht auf die Herbeiführung einer neuen Gleichgewichtslage der letzteren allein beschränkt, sondern tritt auch eine relative Bewegung der Stromleiter gegen einander ein, so wird etzt nicht blos gemeinsames Potential, sondern auch lebendige

Kraft erzeugt. Dies ist z. B. der Fall, wenn ein Stück weichen Eisens von einem Strome angezogen wird.

Da nun die Gleichung (11) immer besteht, die Abnahme des Potentials des Stromsystems auf sich selbst also wieder nur das halbe Äquivalent der gleichzeitigen Zunahme des gemeinsamen Potentials darstellt, so haben die andere Hälfte des gemeinsamen Potentials und nebstbei noch die gewonnene lebendige Kraft die chemischen Kräfte der Kette zu liefern. Es besteht also die Gleichung

$$i dW = \tfrac{1}{2} d(iW) + dL \tag{17}$$

welche auch aus den Gleichungen (11) und (12) unmittelbar folgt.

Aus dieser Gleichung erhält man

$$dL = i dW - \tfrac{1}{2} d(iW) = \tfrac{1}{2} d(iW) - W di.$$

Ist das weiche Eisen zu Beginn der Zeit in unendlicher Entfernung, der Anfangswerth von W also $= 0$, so wird die bei Annäherung gewonnene lebendige Kraft

$$L = \frac{iW}{2} - \int W di.$$

Ist die Intensität des Stromes i so gross, dass dagegen die Änderungen derselben während der Annäherung des weichen Eisens vernachlässigt werden können, so wird näherungsweise

$$L = \frac{iW}{2}$$

und ist dieser Ausdruck zugleich die mit Magnetisirungsarbeit bezeichnete Grösse, zugleich der Endwerth des magnetischen Potentials des weichen Eisens.

Man hat also den Satz: Die lebendige Kraft, welche ein Strom einem aus unendlicher Ferne angezogenen Eisenstück ertheilt, ist gleich dem halben Endwerthe des elektromagnetischen Potentials.

Der gesammte von den chemischen Kräften der Kette geleistete Mehraufwand von Arbeit ist nun

$$\int i dW = \frac{iW}{2} + L = iW - \int W di$$

und näherungsweise

$$\int i dW = iW$$

also doppelt so gross als in dem Falle, wenn der Strom in der Nähe des weichen Eisens geschlossen wird.

Dieselbe Arbeit, welche bei Annäherung des weichen Eisens von den chemischen Kräften der Kette geleistet wird, kommt wieder als Wärme in der Strombahn zum Vorschein, wenn das weiche Eisen vom Strom wieder entfernt wird. Diese Entfernung ist aber nur unter Aufwand von äusserer Arbeit möglich. Es ist nun leicht zu übersehen, dass diese das Äquivalent der früher gewonnenen lebendigen Kraft ist.

Kommen äussere Kräfte neben den elektrodynamischen in Mitwirkung, so tragen auch diese zur Erzeugung des gemeinsamen Potentials und zur Erzeugung von lebendiger Kraft bei. Statt der Gleichung (17) hat man dann die folgende

$$i dW + dA = \tfrac{1}{2} d(iW) + dL \tag{18}$$

worin dA das Element der Arbeit der äusseren Kräfte bedeutet.

Werden diese äusseren Kräfte nur zur Überwindung der elektrodynamischen angewendet, wie beim Fortziehen eines Eisenstückes von einem Strom, so ist $dL = 0$ und es bleibt für diesen Fall

$$i dW + dA = \tfrac{1}{2} d(iW). \tag{19}$$

Man erhält daraus

$$dA = -\tfrac{1}{2} d(iW) + W di.$$

Wird das Eisen in unendliche Entfernung gezogen, so ist der Endwerth von iW Null, es wird

$$A = \frac{iW}{2} + \int W di$$

entsprechend der Formel (17) und näherungsweise

$$A = \frac{iW}{2}$$

Ferner wird die von den chemischen Kräften geleistete Arbeit

$$\int i dW = -\frac{iW}{2} - A = -iW - \int W di$$

und näherungsweise

$$\int i dW = -iW$$

worin das negative Zeichen eben die Aufnahme von Arbeit in die Kette oder einen Überschuss von Wärmeentwicklung bedeutet.

Die Anziehung des Eisens durch den Strom liefert also zuerst lebendige Kraft für chemische Arbeit oder Wärme und bei der Entfernung des Eisens erhält man wieder Wärme für Arbeit.

Man kann aber einen Kreisprocess auch so einleiten, dass man lebendige Kraft gewinnt, ohne in der zweiten Hälfte des Processes wieder mechanische Arbeit aufwenden zu müssen, wenn man nach geschehener Annäherung des weichen Eisens den Strom öffnet. Dann kann das weiche Eisen ohne Arbeitsaufwand in unendliche Ferne gebracht werden. Wird dann der Strom wieder geschlossen, so kann die Gewinnung von lebendiger Kraft von neuem beginnen.

Wird der Strom geöffnet, so sinkt der Werth des elektromagnetischen Potentials von iW auf Null, das Potential des weichen Eisens auf sich selbst steigt um $\frac{1}{2}iW$, es bleibt also noch $\frac{1}{2}iW$ an Potential übrig, welches in der Strombahn als Wärme auftritt und diese ist jetzt kleiner als der Aufwand von chemischer Arbeit während der Annäherung des Eisens war, und zwar kleiner um das Äquivalent der früher gewonnenen lebendigen Kraft.

Man kann aber das weiche Eisen auch in der Nähe des Stromes dadurch entmagnetisiren, dass man dasselbe bis zu jener Temperatur erhitzt, bei welcher Eisen seine magnetischen Eigenschaften verliert. Das so erhitzte Eisen lässt sich nun ohne Aufwand von Arbeit in unendliche Entfernung von dem Strom bringen. Entzieht man ihm dort die Wärme wieder, so wird es vom Strom neuerdings angezogen und kann dieser Process wieder zur Umwandlung von chemischer Arbeit in mechanische verwendet werden.

Da aber bei diesem Processe die Elementarströme nicht in Folge der abnehmenden Intensität des äusseren Stromes in ihre Lagen zurückkehren, sondern der Wirkung der äusseren elektrodynamischen Kräfte entgegen in diese Lagen zurückgeführt werden, so ist die Entmagnetisirung des Eisens durch Wärmezufuhr nicht analog der Entmagnetisirung durch Öffnung des Stromes, sondern analog der Entmagnetisirung des Eisens durch Entfernung desselben vom geschlossenen Strome unter Aufwand von äusserer Arbeit.

Es gilt für diesen Fall die Gleichung (19) in welcher dA das Element jenes Theils der zugeführten Wärme bedeutet, welcher zur Überwindung der elektrodynamischen Kräfte verwendet wird. Zur Erwärmung des magnetisirten Eisens ist also mehr Wärme erforderlich, als zur gleich starken Erwärmung des unmagnetischen. Wäre dies nicht der Fall, so könnte man zwar durch den beschriebenen Process nicht Arbeit aus nichts erzeugen, wohl aber durch den ähnlichen, in welchem an Stelle des magnetisirenden Stromes ein Stahlmagnet gesetzt wird.

X.

Unter den Fällen, in welchen äussere Kräfte neben den elektrodynamischen in Action treten, sind von besonderer Wichtigkeit jene, in welchen diese Kräfte Molekularkräfte sind von der Beschaffenheit, wie sie in Stahlmagneten vorkommen. Sie wirken den inneren elektrodynamischen Kräften des Stromsystems entgegen und verhindern, dass die Elementarströme nach Aufhören der magnetisirenden Kräfte in jene Lagen zurückkehren, welche sie vor der Magnetisirung inne hatten. Eben so arbeiten sie bei einer weiteren Verdrehung der Elementarströme im Sinne einer stärkeren Magnetisirung mit. Man nennt diese Molekularkräfte gewöhnlich Coërcitivkräfte.

Wenn man nun ebenfalls den Stromleiter von unveränderlicher Form annimmt und unter dA das Element der von den Coërcitivkräften geleisteten Arbeit versteht, so gibt die Gleichung (12)

$$idW + dP + dA = dL. \tag{20}$$

Es gibt nun zwei Grenzfälle. Durch den ersten, in welchem

$$dA = 0$$

und der schon abgehandelt ist, wird das absolut weiche Eisen repräsentirt.

Durch den zweiten, in welchem die Coërcitivkräfte mit den inneren elektrodynamischen Kräften fortwährend im Gleichgewichte bleiben, soll ein Magnet aus hartem Stahl repräsentirt sein. Für diesen Fall ist dann, weil dP auch die Arbeit der inneren elektrodynamischen Kräfte darstellt

$$dP + dA = 0. \tag{21}$$

Für diesen Fall gibt die Gleichung (20)

$$i dW = dL$$

und wenn Strom und Magnet fest sind, also keine Bewegung eingeleitet werden kann,

$$i dW = 0$$

d. h. ein ruhender Magnet übt auf einen ruhenden Leiter keine inductorische Wirkung, auch wenn im Leiter der Strom erst geschlossen oder geöffnet wird.

Wird aber der Magnet durch den Strom bewegt oder umgekehrt, so hat die erzeugte lebendige Kraft ihr ganzes Äquivalent in der chemischen Arbeit der Kette.

Für einen starken Strom hat man, wenn der Magnet aus unendlicher Ferne angezogen wird, angenähert

$$L = iW.$$

Die erzeugte lebendige Kraft ist doppelt so gross als die bei demselben Endwerthe des elektromagnetischen Potentials von einem Eisenstück gewonnene lebendige Kraft.

Nähert sich der Magnet dem Strom, so wächst das elektromagnetische Potential um $d(iW)$, das halbe Äquivalent dieses Wachsthums liegt in der Abnahme des Potentials des Magneten auf sich selbst, die andere Hälfte des Äquivalentes

bildet aber die Arbeit der Coërcitivkräfte, welche nach (21) bestimmt ist durch

$$dA = -dP = \tfrac{1}{2}d(iW).$$

XI.

So wie nun die Vorgänge bei den Arbeitsleistungen elektromagnetischer Kräfte und die damit zusammenhängenden Gesetze der elektromagnetischen Induction zurückgeführt worden sind auf die allgemeinen, für die elektrodynamischen Wirkungen geltenden Gleichungen (8 und 9), so lassen sich endlich noch die analogen Gesetze für die Wechselwirkung von Magneten aus denselben Gleichungen ableiten.

Es müssen dann beide bei der Ableitung der Gleichungen (8) angenommene Ströme i und i' ersetzt werden durch Systeme von Strömen, welche in widerstandslosen Bahnen ohne gleichzeitig wirkende elektromotorische Kräfte fortwährend mit unveränderlicher Intensität kreisen. Die Gleichungen (9) gehen dann über in

$$\frac{d}{dt}(2i^2U+ii'V) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(2i'^2U'+ii'V) = 0$$

oder wenn man abkürzend

$$i^2U = P,\ i'^2U' = P',\ ii'V = Q$$

setzt, so dass P das Potential des ersten, P' das Potential des zweiten Systems auf sich selbst, endlich Q das Potential der beiden Systeme auf einander bezeichnet,

$$\begin{aligned} d(2P+Q) &= 0 \\ d(2P'+Q) &= 0 \end{aligned} \tag{22}$$

woraus man

$$\begin{aligned} dP = dP' &= -\tfrac{1}{2}dQ \\ dP+dP'+dQ &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

erhält.

Bei den gegenseitigen Verschiebungen zweier Systeme constanter Ströme ändern sich die Potentiale der beiden auf sich selbst immer um gleiche Grössen und die Summe der Abnahmen dieser beiden ist immer gleich der Zunahme des Potentials der beiden Systeme auf einander. Es ist vielleicht nicht überflüssig, zur Erklärung dieses Satzes folgende Bemerkung beizufügen. Die Abnahme des Potentials des Magnetes auf sich selbst hat nämlich zur Folge, dass der Magnet stärker wird. Es scheint nun, dass die Theorie eine sehr bedeutende Verstärkung der Magnete bei gegenseitiger Annäherung verlangt, während sie bei Stahlmagneten der Erfahrung gemäss, doch nur eine geringe ist. Dagegen ist nun zu erwägen, dass in einem starken Magnete, in welchem die zwei Bestandtheile jedes ursprünglich astatischen Moleküls so gestellt sind, dass sich ihre gleichnamigen Pole nahe liegen, bei weiterer Annäherung dieser Pole das Potential derselben auf einander eine sehr grosse Änderung erfahren kann, ohne dass die Wirkung eines solchen Moleküls in die Ferne merklich grösser wird.

Bei den Bewegungen von Stromsystemen, wie sie Magnete und Eisenstücke darstellen, findet also eine fortwährende Verwandlung der Potentiale derselben auf sich selbst in gemeinsames Potential und umgekehrt statt und zwar nach dem vollen Äquivalente. Es ist also nur noch das Äquivalent der bei solchen Bewegungen erzeugten lebendigen Kraft zu bestimmen.

Die Grösse dieser ist wieder gegeben durch die Gleichung (12), welche für diesen Fall die Form

$$dQ+dP+dP'+dA+dA' = dL$$

annimmt, worin dA und dA' die Arbeiten der Coërcitivkräfte in den beiden Systemen darstellen. Wegen (23) verwandelt sich diese Gleichung in

$$dL = dA+dA' \tag{24}$$

d. h. das Äquivalent der durch magnetische Kräfte erzeugten lebendigen Kraft bilden die Arbeiten der Coërcitivkräfte.

Stellt das erste System einen Stahlmagnet dar, das zweite ein Eisenstück, so hat man

$$dP + dA = 0, \quad dA' = 0$$

zu setzen. Es wird dann aus (24)

$$dL = dA = -dP$$

und in Folge der Relationen (23) auch

$$dL = dA = -dP = -dP' = \tfrac{1}{2}dQ.$$

Die bei der Anziehung eines weichen Stückes Eisen durch einen Magnet gewonnene lebendige Kraft ist gleich dem halben Zuwachse des Potentials des Magneten auf das Eisen. Diesen Satz hat schon Helmholtz mitgetheilt als abgeleitet aus der Poisson'schen Theorie des Magnetismus. Die gewonnene lebendige Kraft ist auch gleich der Arbeit der Coërcitivkräfte im Magnete.

Stellen endlich beide Stromsysteme Stahlmagnete dar, so ist

$$dP + dA = 0, \quad dP' + dA' = 0$$

zu setzen. Die Gleichung (24) verwandelt sich jetzt in

$$dL = dA + dA' = -dP - dP' = dQ$$

und jetzt ist der Zuwachs der lebendigen Kraft gleich dem Zuwachs des Potentials der Magnete auf einander. Sie ist auch gleich der Arbeit der Coërcitivkräfte in den beiden Magneten.

Es ist nun hiemit die Einheit, welche durch die Ampère'sche Theorie des Magnetismus in die statischen Beziehungen der magnetischen, elektromagnetischen und elektrodynamischen Kräfte gebracht worden ist, auch für die dynamischen Beziehungen hergestellt und sind die damit in Verbindung stehenden Gesetze der magnetischen Vertheilung, der elektromagnetischen und elektrodynamischen Induction unter einen Gesichtspunkt gebracht.
